

Session de rattrapage de Topologie (2h30)

N.B Aucun document n'est autorisé pour ce contrôle. Le sujet comporte trois (3) exercices indépendants sur deux pages.

Exercice 1

Soit  $E = \{a, b, c, d\}$  un ensemble donné et  $\mathcal{T}$  la topologie sur  $E$  définie par

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, E\}$$

1. La partie  $\{c\}$  est-elle un fermé pour cette topologie ?
2. Donner tous les fermés.
3. Quel est l'intérieur de la partie  $\{c\}$  ? Quelle est son adhérence ?
4. On considère la suite  $(u_n)_n$  donnée par :  $u_{2n} = a$  et  $u_{2n+1} = c$  pour tout  $n \geq 0$   
Cette suite est elle convergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

A) Dans cet exercice, on considère  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la distance  $d_\infty$  donnée pour tout couple  $(f, g) \in E^2$  par  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ .

1. Soit  $(f_n)_n$  une suite dans  $(E, d_\infty)$  convergente vers une fonction  $f \in E$ . Montrer que  $\forall x \in [0, 1]$  la suite de nombres réels  $(f_n(x))_n$  converge vers  $f(x)$ .
2. On donne dans  $E$ , la suite de fonctions  $(f_n)_n$  définie pour  $n \geq 1$  par :  $f_n(x) = 0$  si  $x \in [\frac{1}{n+1}, 1]$  et  $f_n(x) = -(n+1)x + 1$  sinon
  - (a) Montrer que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x)$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Quelle est la limite de la suite  $(f_n(0))_n$  ?
  - (b) Calculer  $d_\infty(f, \Theta)$ , où  $\Theta$  étant la fonction identiquement nulle. Déduire un réel  $r > 0$  tel que  $f_n$  appartient à la boule fermée  $B_F(\Theta, r)$  pour tout  $n \geq 1$ .
  - (c) Montrer que la suite  $(f_n)_n$  n'admet aucune suite extraite convergente.
  - (d) Ce résultat est-il étonnant ? Justifier.

B) On munit cette fois-ci l'espace vectoriel  $E$  de la distance  $d_1$  définie pour tout couple  $(f, g) \in E^2$  par :  $d_1(f, g) = \int_0^1 |(f - g)(x)| dx$

1. Peut on dire que l'espace métrique  $(E; d_1)$  est complet ?
2. On reprend la suite  $(f_n)_n$  étudiée dans A). Montrer que si  $n \geq m \geq 1$ , on a  $d_1(f_n, f_m) \leq \frac{1}{m}$ .
3. La suite  $(f_n)_n$  est-elle de Cauchy pour cette distance ?
4. Peut-on déduire directement qu'elle converge ?
5. Calculer  $\int_0^1 |f_n(x)| dx$  et déduire la convergence et la limite de la suite  $(f_n)_n$

Exercice 3

On considère  $E = \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$ ,  $a < b$ . On définit  $A : E \rightarrow E$  par :

$$\forall f \in E, \forall t \in [a, b], [A(f)](t) = \int_a^t f(s) ds.$$

1) Démontrez que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\forall f \in E, \forall t \in [a, b], [A^n(f)](t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds.$$

Rattrapage de Langage formel : 2h00

**Exercice 1** 4pts

Définir les expressions suivantes et donner un exemple dans chacun des cas : mot ultimement périodique, morphisme prolongeable, mot primitif, mot chevauchement.

**Exercice 2** (12 pts)

On considère l'alphabet  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ . On note  $\varphi$  le morphisme du monoïde  $(\mathcal{A}^*, \cdot)$  dans lui-même défini par  $\varphi(a) = ab$ ,  $\varphi(b) = ac$  et  $\varphi(c) = a$ . On définit une suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  de mots par  $w_{n+1} = \varphi(w_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

1. Déterminer  $w_5$ .
2. Montrer que  $w_n = \varphi^n(a)$ , pour tout  $n$ .
3. Montrer que  $w_n$  est préfixe de  $w_{n+1}$ , pour tout  $n$ .
4. Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $w_{n+2} = w_{n+1}w_nw_{n-1}$ .
5. Justifier qu'il existe  $n_0$  tel que  $w_n^2$  est préfixe de  $w_{n+2}$ , pour tout  $n \geq n_0$ .
6. Déterminer  $|w_{12}|$ .
7. Déterminer les deux dernières lettres de  $w_n$  (pour  $n \geq 1$ ).
8. Déterminer les facteurs spéciaux de longueur 4 de  $w_6$ .
9. Déterminer l'ensemble des facteurs de longueur 5 dans  $w_6$ .
10. Déterminer l'ensemble des palindromes de longueur 5 dans  $w_6$ .

**Exercice 3** 4pts

Soient  $u$  et  $v$  deux mots finis non vides. Montrer que  $uv = vu$  si et seulement si  $vu$  est à la fois un préfixe des mots infinis  $u^\omega$  et  $v^\omega$ .



**Exercice 1** Soient  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  deux normes sur  $\mathbb{R}^2$  et  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit la norme de  $M$  (ou de l'application linéaire associée) de la manière suivante:

$$\|M\| = \sup_{X \in S_1(0,1)} \|M.X\|$$

où  $S_1(0,1)$  est la sphère unité pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . Calculer la norme de  $M$  pour

$$\|(x, y)\|_1 = \|(x, y)\|_2 = \sup(|x|; |y|).$$

**Exercice 2**

Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $f_p : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par:

$$f_p(x, y) = (x + y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'entier  $p$  pour que la fonction  $f_p$  se prolonge continument en  $(0, 0)$
2. La condition précédente étant remplie, donner une condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit aussi différentiable en  $(0, 0)$ .

**Exercice 3**

1. Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable telle que  $\nabla_{(1,1,1)} f = (5, 2, 1)^T$  et soit  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $t \neq 0$  par  $\varphi(t) = (t^2, t^{-3}, t)$

- (a) Déterminer  $D_{(1,1,1)} f(h)$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^3$
- (b) En déduire  $(f \circ \varphi)'(1)$

2. Déterminer la matrice jacobienne, la différentielle et le jacobien (s'il existe) de l'application  $g$  au point  $X_0$ :

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x - y; z + y, y^2 x^3, -z^4 y^2) \quad X_0 = (-2, 0, 1)$$

**Exercice 4**

Soit  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une application de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que pour tout  $(x, y) \in \Omega$ ,  $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ .

1. Exprimer au moyens des dérivées partielles premières et secondes de  $F$  et de  $\varphi$ , les dérivées partielles premières et secondes de l'application!  $(x, y, z) \mapsto F(x, y, \varphi(x, y))$ .  
En déduire cinq égalités, les deux premières liant les dérivées partielles premières de  $F$  et de  $\varphi$ , les trois dernières liant les dérivées partielles premières et secondes de  $F$  et de  $\varphi$ .
2. On suppose  $(a, b) \in \Omega$  un extremum relatif de  $\varphi$  et on pose  $c = \varphi(a, b)$ .  
Démontrer les relations suivantes:  $F(a, b, c) = F'_x(a, b, c) = F'_y(a, b, c)$
3. Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xy - z + 8$ .  
En appliquant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $\mathbb{R}^2$  et deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ayant chacune un extremum relatif dans leur domaine de définition, telles que, pour tout  $(x, y) \in \Omega_i$ , on ait pour  $i = 1$  et pour  $i = 2$ ,

$$F(x, y, \varphi_i(x, y)) = 0$$

Déterminer ces extrema relatifs.

NB: Bien lire l'énoncé avant de commencer. Compte sera tenu de la netteté de la copie ainsi que la rédaction. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le «ping-pong» est fortement déconseillé.

**Exercice 1** (Cours et applications directes, 5 points)

- Donner la définition d'une mesure.
- (a) Rappeler le théorème de Beppo-Levi.  
(b) Soit  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 1 - |x|$ . Calculer l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $[-2, 2]$  en n'utilisant que les définitions et le théorème de Beppo-Levi.
- (a) L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable ?  
(b) Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  est borélienne.

**Exercice 2** (6 points)

Soit l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ , avec  $\mu(K) < +\infty$  pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $D = \{a \in \mathbb{R} / \mu(\{a\}) > 0\}$ .

- Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $D_{n,k} = \{a \in [-n, n] / \mu(\{a\}) > \frac{1}{k}\}$ . Montrer les ensembles  $D_{n,k}$  sont finis.
- Montrer que  $D = \bigcup_{n,k \leq 1} D_{n,k}$ , puis que  $D$  est dénombrable.
- On pose pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mu_1(A) = \mu(A \cap D)$ . Montrer que  $\mu_1$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  qui est finie sur les compacts.
- Montrer que  $\mu_1 = \sum_{a \in D} \mu(\{a\})\delta_a$ .
- On pose pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mu_2(A) = \mu(A \cap D^c)$ .  
(a) Montrer que  $\mu_2$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , finie sur les compacts et que  $\mu_2(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
(b) Montrer que la mesure de Borel  $\lambda$  vérifie les mêmes conditions que la mesure  $\mu_2$ .  
(d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_2\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right)$ .
- Montrer qu'on obtient la décomposition  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ .

**Exercice 3** (5 points)

1. Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable.

(a). Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0$ .

(b). Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leq n\}} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

2. Soient  $(E, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application mesurable positive. On suppose que  $0 < \int_E f d\mu < +\infty$ . Calculer en fonction du paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E n \ln \left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu$ .

**Exercice 4** (4 points)

Soit  $(E, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré vérifiant  $0 < \mu(E) < +\infty$ . Soit  $0 < \epsilon < 1$  et  $f : E \rightarrow [\epsilon, +\infty[$  une fonction intégrable sur  $E$ .

- Soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Montrer que  $f^\alpha$  est intégrable sur  $E$ . Montrer aussi que  $\ln(f)$  est intégrable sur  $E$ .
- Pour  $\alpha \in [0, 1]$ , on pose  $F(\alpha) = \int_E f^\alpha d\mu$ . Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, \frac{1}{2}[$  et calculer sa dérivée.
- En déduire  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\mu(E)} \int_E f^\alpha d\mu \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

"Quand vous perdez, ne perdez pas la leçon"

Bon Courage !!!